# В.М. МАДОРСКИЙ, Ю.В. МИСАК

# БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

# О МНОГОШАГОВОМ КВАЗИНЬЮТОНОВСКОМ ПРОЦЕССЕ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В настоящей работе нами рассмотрен многошаговый квазиньютоновский процесс для численного решения целого класса квазилинейных задач теплопроводности.

Рассматривается класс квазилинейных уравнений теплопроводности:



(1)

Задача состоит в отыскании приближённого решения уравнения (1), удовлетворяющего начально-краевым условиям:

(2)



Используем разностный метод для решения задачи (1)-(2)

Численное решение задачи (1)-(2) сведём к нахождению приближённых значений сеточной функции  в узловых точках , где .

Рассмотрим модельную задачу с заведомо известными начально-краевыми условиями и решением:



(3)

После замены производных их трёхточечными разностными аппроксимациями (на шаблонах, позволяющих сохранять свойство устойчивости), решение задачи (3) может быть сведено к решению системы:



(4)

Систему (4) решаем с помощью нерегуляризованных нелокальных итерационных процессов.

В операторном виде система (4) представима следующим образом:



(5)

Относительно оператора полагаем, что выполняются условия:

(6)



Квазиньютоновский поцесс для решения системы (5) имеет вид:

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки

(7)



Шаг 2. Вносится поправка в вектор :

(8)



Шаг 3. Если  (параметр останова), то конец просчетов, иначе осуществляется переход на шаг 4.

Шаг 4. Если , то устанавливаем  равным 1, иначе новая шаговая длина определяется следующим образом [1]:



(9)

и осуществляется переход на шаг 1.

Относительно итерационного процесса (7)-(9) справедлива

**Теорема.** Пусть в интересующей нас области существует решение уравнения (5) и кроме условий, накладываемых выше на оператор, имеет место условие . Тогда процесс (7)-(9) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к и справедлива оценка погрешности n-ного приближения:



(10)

**Доказательство.** Используя теорему о среднем для гладких операторов и вид итерационного процесса, имеем



(11)

Проверяя характеристическое свойство, рассмотрим соотношение



(12)

В связи с (12) имеем, что все Пусть , тогда из (11) следует, что , а из (12) имеем, что . Из последних двух соотношений и условий теоремы следует, что .

Применяя метод математической индукции, имеем, что последовательность шаговых длин а последовательность , монотонно убывая, стремится к нулю. Переходя к пределу в (11) при имеем



(12)

Из (12) следует, что последовательность . Покажем, что существует такой номер , что для всех все .



(13)

Соотношение (13) доказывает, что существует такой номер , что для для всех , так, что начиная с этого номера, процесс (7)-(9) переходит в классический метод Ньютона с характерной для последнего квадратичной скоростью сходимости. Оценка погрешности n-ного приближения имеет вид:



Радиус сферы , где имеют место условия, накладываемые на оператор находим стандартным образом:



(16)

Теорема доказана.

Таким образом, метод, предложенный выше, позволяет отыскать решение задач в узлах сетки с точностью вплоть до восьмого порядка. Классический метод И.В. Пузынина [2] оказался менее эффективным по сравнению с рассмотренным методом и методами, предложенными В.М. Мадорским [1].

Подходы к решению квазилинейной задачи теплопроводности, предложенные в работе, показали свою высокую эффективность не только на модельных задачах, но и на ряде других квазилинейных задач теплопроводности. На языке Java в среде NetBeans создана программа, реализующая процесс их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

2. Жанлав Т., Пузынин И.В. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 6. – C. 846-856.